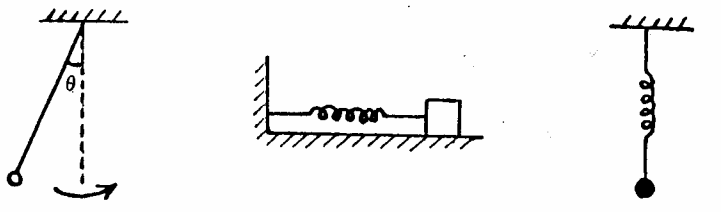
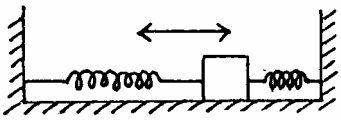
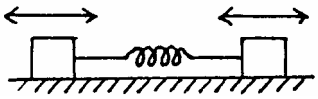
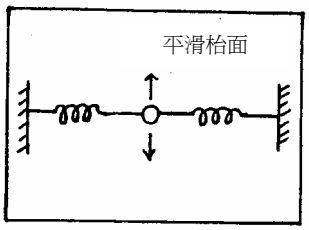
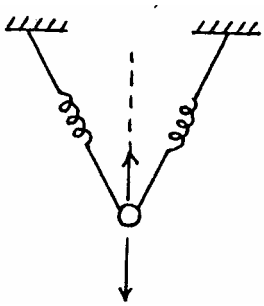
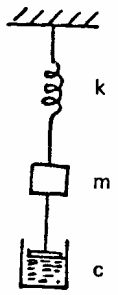
單元 9： 簡諧運動

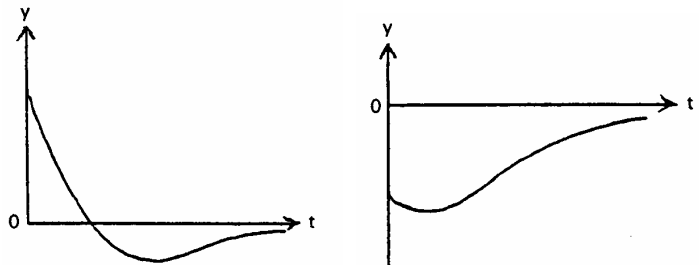
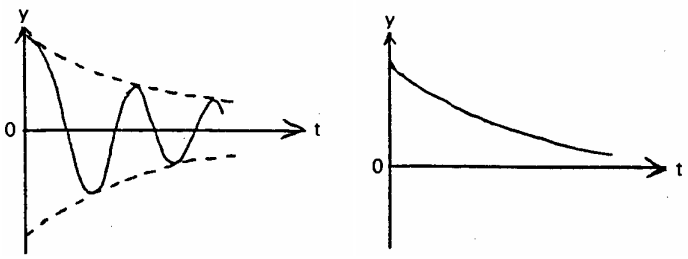
特定目標：

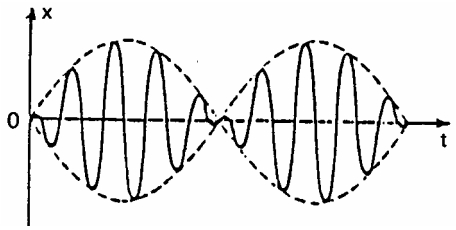
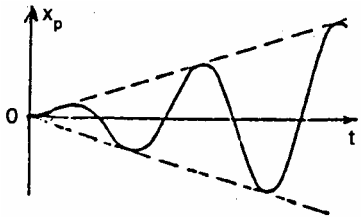
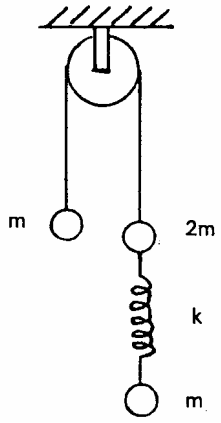
1. 認識簡諧運動。
2. 認識阻尼振動及受迫振動。
3. 解有關應用題。

內容	時間分配	教學建議
9.1 簡諧運動	12	教師可用單擺和彈簧系統來介紹簡諧運動的概念。  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta$ $\ddot{x} = -\frac{\lambda}{m\ell}x$ $\ddot{x} = -\frac{\lambda}{m\ell}x$ 學生應知道任何滿足運動方程： $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 的運動便是簡諧運動。他們亦應留意方程中的負號。教師可將此單元與範疇 II (微分方程) 聯繫。 當學生學習了有關的概念後，教師應引導學生得出以下的基本公式： 加速度 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 速度 $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \alpha) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ 位移 $x = A\sin(\omega t + \alpha)$ 週期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 教師應提醒學生比較加速度、速度和位移的方向。

內容	時間分配	教學建議
		教師亦應與學生討論其他簡諧運動的日常例子。以下是其中的一些例子： (1) 一浮在水上的圓柱木塞垂直振動。 (2) 液體在 U 形管內振動。 (3) 如下圖所示的一些複雜彈簧系統或橡皮筋系統。 (a) (b)  平滑表面  平滑表面 (c) (振幅小) (d) (振幅小)   給予學生足夠的訓練是非常重要的。以下是一些有代表性的例子。

內容	時間分配	教學建議
		例一 一質量爲 m 的質點 A 置於一輕彈簧末端，且平衡地懸垂於一定點處。彈簧之模數是 K 。若另一質量爲 M 的質點 B 加於 A 之上，然後放行；求這合成振動的運動方程和振幅。 *例二* 一重質點懸掛於一橡皮筋的末端，且以振幅 a 作垂直簡諧運動。運動中的最高速率是 $\sqrt{nga}$ ，且 $n > 1$。當質點向上移至與中心點 O 相距 x 時，拉緊的橡皮筋被切斷。探究質點隨後的運動，並找出它能到達的最大高度。
9.2 阻尼振動	3	教師可利用彈簧系統，加入與速率成比例的阻力，來介紹阻尼振動的概念。 (看附圖) 若 m 是物體的質量，c 是液體的阻尼係數，且 k 是彈簧常數，則運動方程將是以下的形式： $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ 以上的方程是二階微分方程。若學生學習了單元 13，他們應不難解以上的方程。不然，教師可將答案直接提供給學生，而證明則留待在單元的時才討論。  教師應與學生討論上述微分方程的根的性質，該等性質並可劃分爲三類：超阻尼、 低阻尼和臨界阻尼。以下四圖顯示在不同的初值條件下，位移 (y) 與時間 (t) 的變化。

內容	時間分配	教學建議
		 正初位移　　負初位移 *負初速度下之超阻尼諧運動*  低阻尼諧運動　　臨界阻尼諧運動

內容	時間分配	教學建議
9.3 受迫振動	5	*例* 一質量爲 m 的質點置於一橡皮筋的末端，而橡皮筋則從一定點處懸垂。緣皮筋的自然長度是 ℓ，其彈性模數是 $5mn^2\ell$ 。當振動時，質點的運動受著一阻力的影響，而該阻力的量值是 2mn 倍其速率。質點初時位於平衡位置，其後則以速率 v 從平衡位置向下拋射。. 在此例中，學生應可證明運動方程是 $\ddot{x}+2n\dot{x}+5n^2x=0$ ，而 x 是在時間 t 的位移。教師可引導學生解以上的方程，並找出該質點瞬時靜止的時間。 驅動力 F(t) 應是以下的其中一種形式：t^n、cos ωt、sin ωt、$e^{\mu t}$ 或這些函數的綫性組合。教師應與學生討論以下兩種情況： (a) *無阻尼受迫振動* 這振動的運動方程是 $m\ddot{x}+kx=F(t)$。教師可與學生討論如何找出方程的通解和特別解。教師應著重此類方程的解的實際意義。例如：當 $F(t) = F_0 \sin \omega t$，以下是兩種情況下的特別解。 拍  共鳴 

內容	時間分配	教學建議
	20	*(b) 阻尼受迫振動* 學生應不難得出運動方程爲 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$ 若 F(t) 是已知，則方程的解可直接找到的。在某些情況下，學生是需要從已知條件中找出驅動力的數式。以下是其中一個例子。 *例* 兩質點的質量分別爲 m 和 2m，由一條不能伸延的繩子連接。繩子跨過一光滑的固定滑輪 (如圖示) 。另一質量爲 m 的質點，由一彈簧與較重的質點連接。彈簧的模數是 k 。初時彈簧沒有伸長，然後所有質點從靜止中放行。探究所有質點的隨後運動。 在此例中，作用於第三粒質點的驅動力不是直接知道的，學生需要由有關資料求出。