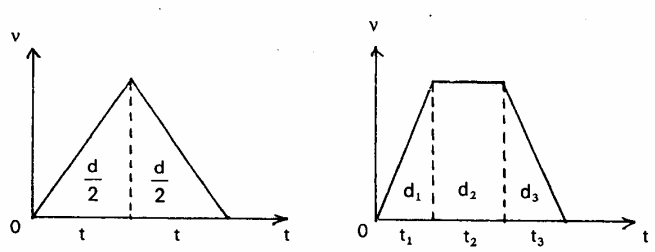
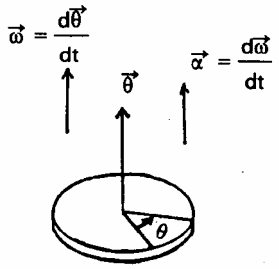
單元 3： 運動學

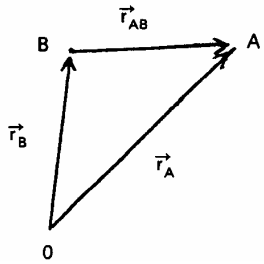
特定目標：

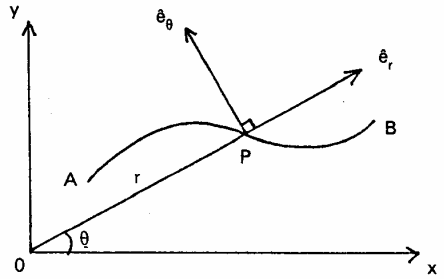
1. 理解位移、速度和加速度及其對應的角位移、角速度和角加速度的意義。
2. 理解合成速度和相對運動。
3. 認識速度和加速度的徑向和橫向分量。
4. 解有關的實際問題。

內容	時間分配	教學建議
3.1 位移速度和加速度	2	教師應替學生復習位移、速度和加速度的意義，此外教師應嘗試利用向量和微積分的探討方法。爲簡單起見，教師可先局限在沿 x 軸的運動並取 x 增加的方向爲正向方向。若此，學生應不難導出以下公式 $v=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ ，$a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$ 或 $a=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$ 。 教師應提醒學生當 x、v 和 a 是負數時的物理意義。 對恆加速度的情況，學生應能自行導出以下的公式： $v=u+at$ $x=ut+\frac{1}{2}at^2$ $v^2=u^2+2ax$ 應在此引入質點的二維運動。教師應提醒學生取質點位移、速度和加速度的 x 和 y 軸分量，然後可以在這個方向應用直綫運動方法。記質點在一點的位移爲 $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ ，學生在引導下應能發現 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$ 及 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}$ 從上式亦不難求出速度和加速度的量和方向。

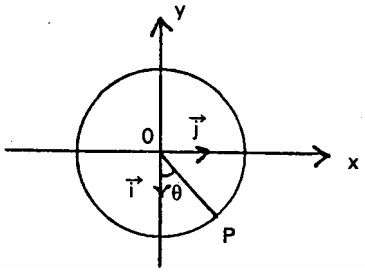
內容	時間分配	教學建議
		在這階段，應強調利用直角座標的參數方程去描述質點的運動路徑。學生應懂得應用 1.10 節中學會的知識和技巧去解問題。以下是一些例子。 *例一* 質點 P 由原點 O 出發的速度向量 $\vec{v}$ (ms^{-1}) 是 $80\vec{i}+(50+10t^2)\vec{j}$ 。相對於原點 O，P 在時間 t 的位置向量及加速度向量可輕易在求 $\vec{v}$ 的積分和導數中獲得。 *例二* 兩車站的距離是 d。一列火車由一車站出發在時間 t 到達下一車站。若最大的加速度或減速度均是 a 而最大速度不能超過 v ，證明 t 的最小可能值是 (a) $t=\frac{d}{v}+\frac{v}{a}$ 若 $d\geq\frac{v^2}{a}$ (b) $t=2\sqrt{\frac{d}{a}}$ 若 $d<\frac{v^2}{a}$ 在此例中，教師可引導學生利用幾何作圖的方法求解： 

內容	時間分配	教學建議
3.2 角位移、角速度和角加速度	1	教師應簡略地介紹有關角位移、角速度和角加速度的概念，學生亦應懂得以下三個有關綫性量和角量的關係 $s = r\theta$ $\dot{s} = r\dot{\theta}$ (或 $v = r\omega$) 及 $\ddot{s} = r\ddot{\theta}$ (或 $a = r\alpha$)  角運動的向量表達法可以右圖說明。學生應知道利用右手法則確定旋轉的正方向。只要轉動是局限在單一平面上，轉動向量 $\vec{\theta}$、$\vec{\omega}$ 及 $\vec{\alpha}$ 將會互相平行而可以當作標量處理，因爲代數的正負號已足夠說明向量的方向。 *例* 一圓盤以加速度 $\ddot{\theta} = 2t$ 沿著軸心轉動。若初始條件爲θ = 0 弧度，θ' = 0 弧度 / 秒，求時間 t = 3s 秒時的角速度和角位移。 學生可以在此例中利用積分法得出結果。
3.3 合速度	3	這裡強調的是如何求得質點的合速度。教師應提醒學生可利用三角形 (或多邊形) 定律或分量法去求合速度。一些如划船橫渡河流和雨點在氣流中落下等問題可作討論。在這些情況中，學生應利用向量圖去求合速度。速度並不互相垂直的情況也應討論。以下是一例子。

內容	時間分配	教學建議
		例 一艘貨船離閩港口，向著 N50°E 的方向進發，其在靜水中的速度爲 25 kmh^{-1}，但水流則以 4.5 kmh^{-1} 的速度向東流，求貨船的合速度。 在上例中，學生除了可以把速度沿東和西方向分解求合速度外，還可以利用正弦和餘弦定律去求合速度。
3.4 相對運動	8	教師應替學生復習有關位置向量的概念。而相對運動的概念可以利用向量的方法引入，如圖所示，A 相對 B 的位置向量是 $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ 因此 $\dot{\vec{r}}_{AB} = \dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B$ 即 A 相對 B 的速度是 $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$  要介紹 A 相對於 B 的速度，較易的方法可在 A 和 B 上加上速度 $-\vec{v}_B$ “使 B 靜止”，即能得到 A 相對於 B 的速度是 $\vec{v}_A - \vec{v}_B$。相對速度的問題可以利用三角學和向量的知識去解決。其中有關攔截和兩物體最短距離的問題是典型的例子。 *例一* A 船以速度 50 kmh^{-1} 向南移動。從 A 船觀察，B 船似以速度 75 kmh^{-1} 向西南方向移動，求 B 船的速度。 在上例，教師可引導學生畫出三角形的向量圖，然後用正弦和餘弦定律求 B 的速度。 *例二* 在中午，S 船在原點以速度 $10\vec{j}$ 出發。同時，另一艘船 S_2 以位置向量爲 $\vec{r} = -10\vec{i} - 10\vec{j}$ 和速度向量爲 $20\vec{i} + 25\vec{j}$ 出發。 在上例中，教師可引導學生寫下在時間 t 時一船相對另一船的向量方程，然後兩船的最近位置向量和最接近的距離亦可加以討論。

內容	時間分配	教學建議
		例三 一顆人造衛星以恆速率 u kmh^{-1} 沿西北方向的路徑與水平成傾角 θ下墜。一艘朝西以恆速率 v kmh^{-1} 行駛的船從點 0 觀察得衛星離船的水平距離爲 d km，高度爲 h km 而方向爲西北方。 (a) 相對於 0 點，求 (i) 人造衛星的位置向量； (ii) 人造衛星的速度 的表達式。 (b) 求船和人造衛星之間的最短距離。 這個例子可以幫助學生綜合有關向量和相對速度所學到的知識。 最後教師可以向學生提出，要爲 A 相對 B 的加速度下定義，學生可用與相對速度相類似的方法而做，即 $\overrightarrow{a_{AB}} = \overrightarrow{a_A} - \overrightarrow{a_B}$ 。
3.5 速度和加速度的沿徑向量及垂直徑向量分解	4	考慮質點在平面上的運動，教師可以利用極座標引入速度和加速度的徑向和橫向分量。 

內容	時間分配	教學建議
		設 P 是質點在時間 t 時的位置，APB 是質點的路徑和 P 的極座標是 (r, θ). 因此 $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = r\hat{e}$ 而 $\hat{e}_r$ 和 $\hat{e}_\theta$ 是平行於和垂直於 $\vec{r}$ 的單位向量。 在以上 1.11 節學生已學會 $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 和 $\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$ 。對它們直接微分，學生不難得到以下結果： $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 和 $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\hat{e}_\theta$ 表列以上結果有助學生認識清楚表達式。 | | 徑分量 | 橫分量 | | 速度 | $\dot{r}$ | $r\dot{\theta}$ | | 加速度 | $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ | $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ 或 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})$ | *例一* 一單位質量的質點在平面上移動，其極坐標爲 $r(t) = 1 + t$ $\theta(t) = \frac{\pi}{1+t}$ 而 $t \geq 0$ 在時間 $t = 1$ 時，求質點的速度和加速度的徑向和橫向分量。

內容	時間分配	教學建議
	12	*例二* 質點 P 以圓心 O 和半徑 a 繞著圈圈運行如圖示。某位置向量在時間 t 時為 $\vec{r} = a\hat{e}_r$ 其中 $\hat{e}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ 若 $\hat{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$ 求證 $\dot{\vec{r}} = a\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 及 $\ddot{\vec{r}} = a\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\hat{e}_r$  雖然極座標是很適合去解一些有關中心軌道的動力問題，但有關軌道問題的詳細知識是不需要的。
	18	