单元 15： 近似

特定目标：

1. 学习近似的概念和误差的处理。
2. 学习泰勒展开式。
3. 应用泰勒展开式逼近函数及估计其误差。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
15.1 误差的处理、误差估计及代数运算	6	对任何计算，无论人手的，用计算器或计算机计算出来的，数值结果的误差分析是一个基本的问题。由于原始数据往往是基于实验结果或估计，故此它们通常不是精确的，而数值解法本身也引入各类不同的误差。为了使学生明了计算结果的精确程度，教师应教授学生处理计算中的简单误差分析。
(a) 三种主要的误差		学生应知道在数值计算中的三种主要误差为固有误差、截断误差及拾入误差。
(i) 固有误差		固有误差是指由量度的不确定所产生的数值上的误差或由于必须利用有限数目位记忆来储存一些不能以有限数目位数准确表达的数字而造成的误差。
(ii) 截断误差		截断误差及舍入误差同指那些由数值方法处理数据而产生的误差。以有限的步骤取代无穷的数学程序所引致的误差称为截断误差。在此课程中的数值方法，很多数学程序是无穷的 (意思是指要获得精确答案须要无穷数目的迭代运算)，故此截断误差远题目是十分重要的。
(iii) 舍入误差		利用计算器或计算机处理实数运算会产生舍入误差，这因为算术运算只能用有限位数进行，令很多计算以近似值取代真实数值。 要学生明白舍入的意念，教师可用十进制 k 位数以标准型式 $\pm 0.d_1d_2d_3\ldots d_k \times 10^n$ ， $1 \le d_1 \le 9$ ， $0 \le d_i \le 9$ 其中 $i = 2, 3, 4, \ldots, k$ 说明。此外，收尾法及去尾法的意念亦须清楚向学生解释。
(b) 绝对及相对误差		在此阶段，教师宜与学生重温他们在中三时学过的绝对及相对误差，并向他们指出 (a) 部份的三类误差都可以绝对或相对形式表示。

101

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
(c) 误差估计		一个物理量度可能以某一数目的位数连同固有误差的界限一起表示，例如该长度为 2.3 ± 0.1 cm 或 2.3 cm (准确至二位有效数字)，又或者完全没有说明位数的有效性，例如长度为 2.3 cm。在后者而言，一般约定是它的误差界限为不超过末位的半个单位，即是 0.05 cm。 至于截断误差，教师宜在本单元的有关章节内教授计算方法时向学生介绍。 教师宜引导学生推导出用 k 位数拾入算术相对误差的界为 $0.5 \times 10^{-k+1}$。
(d) 误差的合成		这里的重点是在某一阶段误差的传播问题，即是说，在连串的运算中，误差的效应是扩大或是缩小的问题。学生应熟习下列的事实。 1. 和及差 若 $S = a + b$，则 $\max\lvert\Delta S\rvert = \lvert\Delta a\rvert + \lvert\Delta b\rvert$. 若 $K = a - b$，则 $\max\lvert\Delta K\rvert = \lvert\Delta a\rvert + \lvert\Delta b\rvert$. 2. 乘及除 若 $P = ab$，则 $\max\left\lvert\frac{\Delta P}{P}\right\rvert = \left\lvert\frac{\Delta a}{a}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta b}{a}\right\rvert$. 若 $Q = \frac{a}{b}$ ，则 $\max\left\lvert\frac{\Delta Q}{Q}\right\rvert = \left\lvert\frac{\Delta a}{a}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta b}{a}\right\rvert$. 3. 指数 若 $F = a^k$，则 $\max\left\lvert\frac{\Delta F}{F}\right\rvert = k\left\lvert\frac{\Delta a}{a}\right\rvert$。 下列是一些练习的例子。 *例一* 两质量分别量度为 (100.0 ± 0.4)g 及 (94.0 ± 0.3)g。计算该两质量和及差的最大绝对误差。 *例二* 已知单摆的时间周期为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ，其中 ℓ 为单摆的长度和 g 是自由物体的重力加速。现以一长为 0.600 m 的单摆来确定 g 的值。若测量得的 T 值为 1.55 s，计算 g 值的最大误差百分率。

102

内容	时间分配	教学建议
15.2 利用泰勒展开式逼近函数值 (a) 函数的泰勒展开式	6	作为引起动机，教师可着学生求多项式 $p(x)$ 而其值与导数在单一变量 x_0 上与函数 $f(x)$ 的吻合，即 $p^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)$，$i = 0, 1, 2, \ldots, n$. 将 $p(x)$ 写成 $p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots\ldots+a_n(x-x_0)^n$，教师可引导学生导出 $f(x)$ 的泰勒展开式 $p(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$。这个观念可推展至利用无限级数的泰勒展开式来表示一个函数 $f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+f^{(2)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\ldots\ldots$ 以下展开式例子可用作说明。 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\ldots$ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots$ $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots$ 在现阶段，教师值得提出麦克劳林级数是泰勒展开式的一个特例，而对一些能力较高的学生，则可以用下列方法与他们讨论泰勒展开式的收敛区域。 对 ln x 的展开式，取 $x_0 = 1$，学生可得 $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots\ldots$ 代入 $x = 1$ 及 $x = 2$，上式分别变为 $\ln 1 = 0$ 及 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots\ldots$。教师可要求学生将 $x = 0$ 及 $x = 3$ 代入展开式并引导他们发现所得的展开式是不收敛的。之后，同学可以尝试计算在收敛区域内一些变量上的函数值。在这里，基本上只要求学生能展开泰勒展开式至四阶导数及完成相应的计算。函数如 $y=(1+x)^2\ln(1+x)$ 是典型例子。

内容	时间分配	教学建议
(b) 误差的估计	12	学生应能回忆起利用拉格朗日多项式逼近函数时的截断误差这个名词。教师并可导出拉格朗日形式的余项 (只对能力较高的学生) 为 $R_n=f^{(n)}(\varepsilon)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ 其中 ε 介于 x_0 及 x 之间。 学生应不难看出泰勒展开式的最大误差是 $\lvert R_n\rvert\le\left\lvert M\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right\rvert$ 其中对所有 ε 介于 x_0 及 x 之间 $M=\max\lvert f^{(n)}(\varepsilon)\rvert$。 给出这个误差项，教师可要求学生计算一些例子如只取展开式 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots$ 的首三项来估计 $\cos\frac{\pi}{3}$ 的最大误差及求出利用 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots$ 计算 e 值而最大误差少于 0.0001 时应用的项数。